Satz 4
Es seien $a, b \in \mathbb{N}^*$, $a > b$. Man bildet die (endliche) Folge
$r_0 := b$, $r_1 =$ mod (a, b), $r_2 = mod(r_0, r_1)$ ... $r_n =$ mod (r_{n-2}, r_{n-1}),
Abbruch falls $r_n = 0$
In diesem Falle gilt: ggT$(a, b) = r_{n-1} \rightarrow$ letzter nicht verschwindender Rest

Bezeichnungen:

- j-te Division
  $r_{j-2} : r_{j-1} = g_j$ Rest $r_j (j = 1, ..., n)$

Satz 5 (erweiterter EUKLIDscher Algorithmus)
Zusätzlich zur Folge (r_n) aus *Satz 4* bilde man die Folgen

$x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = x_0 - q_2 x_1, ..., x_j = x_{j-2} - q_j x_{j-1}$ mit $(j \leq n - 1)$
$y_0 = 1, y_1 = -q_1, y_2 = y_0 - q_2 y_1, ..., y_1 = y_{j-2} - q_j y_{j-1}$ mit $(j \leq n - 1)$

Dann gilt, für alle $j = 0, ..., n - 1 : r_j = x_g a + y_g * b$
Insbesonders gilt: $ggT(a, b) = x_{n-1} a + y_{n-1} b$

Diskussion

- Der Sinn des erweiterten EUKL. Algorithmus besteht darin, in jedem Schritt den Div. Rest als Linearkombination von a und mit ganzzahligen Koeffizienten x und y darzustellen: $r = x * a + y * b$
  Der Mechansimus wird am besten und nach folgenden Bsp. 4 deutlich.

- Sind c und m teilerfremd, $1 \leq c < m$, d.h. $ggT(e, m) = 1$, so
  erhält man mit Satz 5 $(a = m, b = c)$eine Darstellung der Form
  $1 = x * m + y * c \leftarrow y * c = 1(modm)$ und damit $c^{-1} = y$ (mod m)
  (Für die modulare Inverse muss evtl. noch der in $\mathbb{Z}_{\gtrdot - \nVdash}$ liegende zu)
  y kongruenten Wert ermittelt werden

Bsp. 3
Man ermittle den größten gemeinsamen Teiler t sowie das kleinste gemeinsame Vielfache v der Zahlen 132 und 84

$$132 : 84 = 1 \text{ Rest } 48$$

$$84 : 48 = 1 \text{ Rest } 36$$

$$48 : 36 = 1 \text{ Rest } 12$$

$$36 : 12 = 3 \text{ Rest } 0$$

$$v = \frac{a * b}{t} = \frac{132 * 84}{12} = 924$$

Bsp. 4
Man ermittle die modulare Inverse von 11 zum Modul 25

$$25 : 11 = 2 \text{ Rest } 3 \; 3 = 25 - 2 * 11$$

$$11 : 3 = 3 \text{ Rest } 2 \; 2 = 11 - 3 * 3$$

$$3 : 2 = 1 \text{ Rest } 1 \; 1 = 3 - 2$$

EULERsche φ Funktion (Satz von EULER)

Definition 6
Es sei $n \in \mathbb{N}^*$. Dann EULERsche φ Funktion:
$\varphi(n) :=$ Anzahl der zu n teilerfremden Elemente aus $\{1, 2, ..., n\}$

Eigenschaften der φ Funktion

- Es sei p eine Primzahl, dann gilt $\varphi(p) = p = 1, \varphi(p^k) = p^{k-1}(p-1)$
- Falls $ggT(m, n) = 1$, so gilt $\varphi(m * n) = \varphi(m) * \varphi(n)$
  Speziell $n = p * q$, p und q Primzahlen, dann $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$

Satz 6 (Satz von EULER)
Es sei $ggT(a, n) = 11$, dann gilt $a^{\varphi(n)} = 1(modn)$

RSA Verschlüsslung

- Die Formeln 1 und 2 bilden die Grundlage für die sogenannten RSA-Verschlüsslung
  (RIVEST, SHAMIR, ADLEMAN 1978)
- Schlüsselerzeugung:
  - Man wählt (in der Praxis sehr große) Primzahlen p und q
  - $n = p * q$, $m := \varphi(n) = (p-1)(q-1)$
  - e wird so gewählt, dass $ggT(e, m) = 1$ ist
  - $d := e^{-1}$(mod m)(modulare Inverse)
  - (n, e)... öffentlicher Schlüssel
    (n, d)... geheimer Schlüssel (geheim ist nur d)
    p, q, m werden nicht mehr benötigt, bleiben aber geheim
- Verschlüsslung:
  Klartext a teilerfremd zu n... Verschlüsselt mit e, d.h. $b := a^e mod(n)$ bilden
  $\rightarrow$... Geheimtext

- Entschlüsslung:
  Der Empfänger und Besitzer des geheimen Schlüssels bildet $b^d(mod n)$ und erhält $b^d = a(mod n)$, denn:

  $b^d = (a^e)^d = a^{ed} = a^{1+k*m} = a^{1+k*\varphi(n)} = a*(a^{\varphi(n)})^k = a(mod n)$

Reelle Zahlen

$\mathbb{R}$ ... Menge der reellen Zahlen.
Auf $\mathbb{R}$ existiert eine algebraische Struktur und Ordnungsstruktur.
Algebraische Struktur
$(\mathbb{R}, +, *$ mit den Operatoren $+$ (Addition) und $*$ (Multiplikation)
ist ein Körper

Definition 7

- $O! := 1, n! := n * (n-1)!(n \in \mathbb{N}^*)$
  (rekursive Definition) $\rightarrow n! = n * (n-1) * ... * 2 * 1$
- Sei $\alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}^*)$ dann:

Diskussion

- Für $k, n \in \mathbb{N}, o \leq k \leq n$ gilt:
  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- Binomischer Satz:
  $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} * b^k = a^n + \binom{n}{1} * a^{n-1} * b \binom{n}{2} * a^{n-2} b^2 + ... + b^n$

Stellensysteme

- Es sei $b > 1$ eine natürliche Zahl (die sogenannte Basis)
- $x = (x_p x_{p-1} ... x_1, x_0, x_{-1}, ..., x_q) :=$
  $x_p * b^p + xp - 1 * bp - 1 + ... + x_1 * b^1 + x_0 * b^0 ...$
  heißt Darstellung von x zur Basis b

Stellensysteme
$b = 2$, Ziffern $\{0, 1\}$ ... Dual oder Binärsystem
$b = 3$ ... Trialsystem
$b = 8$ ... Oktalsystem
$b = 10$ ... Dezimalsystem
$b = 16$... Hexadezimalsystem
Übergang von einem Ziffersystem in ein anderes Ziffernsystem

Grundlage
Aus (∗) ergibt sich durch fortgeschrittenes Klammern

$$x = ((...((x_p b + x_{p-1})b + x_{p-2})b + ... + x_2)b + x_1)b + x_0$$
$$x = ((...(x_{-g} b^{-1} + x_{-(q-1)})b^{-1} + ... + x_{-2})b^{-1} + x_{-1})b^{-1}$$

Übergang Dezimalsystem → andere Systeme

- ganzer Teil: fortgesetzte Division durch b und Restabspaltung
  liefer die b-Ziffern in Reihenfolge $x_0, x_1, x_2...$
- gebrochener Teil: Fortgesetzte Multiplikation mit b und Abspaltung des Ganzzahligen
  Teils liefert die b-Ziffern $x_{-1}, x_{-2}, ...$

Bsp: Hexadezimalzahl

$$x = (435, 9)_{10}$$

$$435/16 = 27 \text{ Rest } 3$$
$$27/16 = 1 \text{ Rest } 11$$
$$1/16 = 0 \text{ Rest } 1$$

$$0,9 * 16 = 14 \text{ Rest } 0,4$$
$$0,4/16 = 6 \text{ Rest } 0,4$$

Ziffernfolge jeweils vom Komma an!

$$x = 1B3, E6$$

Bsp: Übergang andere Systeme → Dezimalsystem

- Entweder direkte Auswertung von (x) (v.a. beim Dualsystem → Addition von 2-er Potenz oder Klammern in $\binom{*}{*}$ von innen nach außen berechnen.
- HORNER-Schema: siehe Aufzeichnungen

Bsp: Hexadezimalzahl ↔ Dualzahlen
4 Dualziffern entsprechen einer Hexadezimalzahl → 4er Gruppen von Datenstrukturen bilden (ab Komma)

$$(A8C, B2)_{16} = 101010001100, 1011$$

Bsp. 8
a) $(A8C, B2)_{16} = (101010001100, 10110010)_2$
b) $(01101110, 1010)_2 = (6E, A)_{16}$

Zahlendarstellung im Computer

Ganze Zahlen im Zweierkomplementdarstellung
(n Bit, meist $n = 8, n = 16, n = 32, n = 64$)

- **Bsp**
  n = 8: $(100)_{10} = (64)_{16}$
- Um auch negative Zahlen darstellen zu können, wird das MSB (most significant bit) als Vorzeichenbit reserviert. Negative Zahlen $(1 \leq a \leq 2^{n-1})$ werden im sogenannten Zweierkomplement $a := 2^n - a(\overline{a} \geq 2^{n-1}$
- Nichtnegative Zahlen $0 \leq a \leq 2^{n-1} - 1$ werden unverändert dargestellt (MSB = 0)
- Darstellung ganzer Zahlen von -2^{n-1} bis $2^{n-1} - 1$ (Anzahl 2^n) möglich;
  $n = 8, ..., 127$

Umwandlung negativer Zahlen in Zweierkomplement

Bsp. 9

($n = 8$), umzuwandeln sei -100 (dezimal) wäre 1 Möglichkeit für die Umwandlung

$100 = 2^8(256) - \overline{100} = 156(9C) = 10011100$
Bemerkung: Das Zweierkomplement der positiven Zahl 100 ist die positive Zahl $\overline{100} = 156$, diese wird wegen MSB = 1 als negative Zahl -100 interpretiert.

2. Möglichkeit (am schnellsten): Rechts beim LSB (least siginficant bit) beginnend alle Ziffern die einschließlich der ersten 1 unverändert lassen, für alle höherwertigen Ziffern Z das Einerkomplement $1 - Z$

$100 : 01100100$
$\overline{100} : 10011100$

Rückumwandlung (Zahl mit MSB $= 1 \rightarrow$ neg. Zahl) analog:
$\overline{156} = 256 - 156 - 100 \rightarrow -100$

Subtraktion
Die Subtraktion wird auf die Addition des Zweierkomplements zurückgeführt.

Bsp. 10
$a = 64 - 100$
$64 = 2^6$

Bemerkung: Für die Handrechnung (z.B. $2 - 5 =: a$) kleinere Zahl von der größeren subtrahieren $a = -(5 - 2)$
Für n die Binärstellen des Minuenden $(5)_{10} = (101)_2$, also $n = 3$

Es wird ausschließlich mit nicht negativen Zahlen gerechnet.

$(5-2)_{10} = 5$
$(5-2)_{10} = ((5+2^n-2)-2^n)_{10} = (5+\overline{2}-2^n)_{10}$
$2 = (010)_2 \rightarrow \overline{2} = (110)_2$

Verallgemeinerung
Festkommasystem (feste Stellenanzahl, Komma an fester Stelle)

Vorteil: rundungsfreie Rechnung, nur Überlauf muss beachtet werden
Nachteil: Nur sehr beschränkter Zahlenbereich darstellbar $\rightarrow$ Gleitkommasystem

Ein Überlauf (Ergebnis $\geq 2^{n-1}$ oder $\leq -2^{n-1}$) ensteht in folgenden Fällen ERROR

	a	b	a + b
MSB	0	0	1
MSB	1	1	0

Gleitkommasysteme
$x = v * m * b^e$

- $v = (-1)^V$ ... Vorzeichen ($V = 0$ ... Positive Zahl | $V = 1$ ... Negative Zahl)
- m... Mantisse, Stellenzahl p, da Mantisse heißt normalisiert, falls sie die Gestalt $m_1, m_2 m_3 ... m_p$ oder $0, m_1 m_2 ... m_p$
  mit $m_1 \neq 0$, dabei $m_1, ..., m_p$ Ziffern zur Basis b
- e ... Exponent, ganzzahlig $e_{min} \leq e \leq e_{max}$

In jedem Gleitkommasystem sind nur endlich viele Zahlen darstellbar, die Menge der reellen Zahlen ist aber überabzählbar (unendlich. Gleitkommazahlen liegen auf der reellen Achse diskret verteilt (fester Exponent, dann haben sie gleiche Abstände. Wänn der Exponent um k wächst, so wachsen die Abstände auf das $b^k - fache$

Rundung
Zahlen, die nicht in dieses "Raster" passen werden auf die nächstgelegene Gleitkommazahl gerundet. Falls die Zahl genau in der Mitte zwischen zwei "Rasterzahlen" liegt, wird auf die nächstgelegene gerade Zahl gerundet.

Bsp.
$3,75 \rightarrow 3,8; 4,65 \rightarrow 4,6$ bei Rundung auf 1 Stelle nach dem Komma

Nummerische Probleme beim Rechnen mit Gleitkommazahlen

- Kommutativ-, Assoziativ -und Distributivgesetz gelten im allgemeinen nicht. Ursachen sind z.B. Ziffernauslöschung bei Subtraktionen von fast gleichen Zahlen, Addition oder Subtraktion von Zahlen unterschiedlicher Größenordnung, Aufsummierung von Rundungsfehlern.

Bsp. 11
Man berechne $(a + b) + c$ und $a + (b + c)$ in einem System mit 3-stelliger Mantisse:
$a = 3,73 * 10^6$
$b = -3,71 * 10^6$,
$c = 6,42 * 10^3$

$a + b = 0,02 * 10^6$ (Normalisierung)
$c = 6,42 * 10^3 = 0,642 * 10^4 \rightarrow 0,64 * 10^4$
$(a + b) + c = 2,64 * 10^4 \rightarrow 26400$

$c = 0,00642 * 10^6 = 0,01 * 10^6$ (Runden auf 2 Kommastelle)

$b + c = -3,70 * 10^6$
$\rightarrow a + (b + c) = 0,03 * 10^6 = 3,00 * 10^4 = 30000$
exakter Wert: $a + b + c = 26420$

Die Aufgabe der nummerischen Mathematik ist es, die umvermeidlichen Genauigkeitsverluste beim Rechnen mit Maschinenbefehlen durch optimale Organisation der Rechnung und Fehleranalyse in Grenzen zu halten.

Gleitkommaformat IEEE 754
Es gibt verschiedene Genauigkeitsstufen. Wir behandeln hier nur die *single precision, 32Bit*

$x = v * m * b^e = (-1)^V * 1, m_2 m_3 ... M - 24 * 2^E$ dabei gilt: $b = 2$

- Vorzeichen $V = 0 \rightarrow$ positiv, $V = 1 \rightarrow$ negativ (1 Bit)
- Mantisse m_1 im Binärsystem stets $= 1$
  Nur Abspeicherung von $M = m_2 m_3 ... m_{24}$ (23 Bit)
- Exponent: Abgespeichert wird die Zahl $E := e + B$
  mit dem sogenannten *Bias* Wert $B = 127$
  als nicht negative, 8-stellige Binärzahl (8 Bit)
  $e_{min} = -126 (E = 1), e_{max} = 127 (E = 254 = 11111110)$

  Die Grenzfälle $E = (00000000)_2$ und $E = (11111111)_2$ sind für Sonderfälle vorgeschrieben ($0, \infty$, nicht definierte Werte)
- Abspeicherung in der Reihenfolge $V|E|M$ (Vorzeichen, Exponent, Mantisse)

Bsp. 12
Umwandlung Dezimalzahl → in IEEE754 (32Bit) mit $x = 435,9$ (vgl. Bsp. 6)

- Konvertierung in Dualzahl (unter Verwendung von Bsp 6 / Hexadezimalzahl)
  $x = (1B3, E\overline{6})_{16} = (1|1011|0011|1110|0110)_2$
- Normalisierte Darstellung, Mantisse mit 23 Stellen nach dem Komma
  $x = (1,10110011111001100110011|00110...)_2 * 2^8$ (Die 23 Stellen entstehen durch Abrundung)
- Exponent $e = 8 \to E = e + B = 8 + 127 = 135 = (8,7)_{16} = (1000|0111)_2$
- $V = 0$, da x positiv ist
  → x: 0|10000111|10110011111001100110011

Bsp. 13
IEEE 754 → Dezimalzahl mit 1|10000011|01111100000000000000000

- Exponent $E = (10000011)_2 = 131 \to e = E - B = 131 - 127 = 4$
- $V = 1 \to x < 0$, normalisierte Mantisse $1, M$
  $\to -(1,011111)_2 * 2^4 = -(10111,11)_2 = (23,75)_{10}$

Bemerkung
Neben dem single Format gibt es in IEEE754 unter anderem

- double: 64Bit, V = 1Bit, E = 11Bit, M = 52Bit, B = $2^{10} - 1 = 1023$

Zahlenbreiche:

- single: $1,401 * 10^{-45}...3,403 * 10^{38}$
- double: $4,941 * 10^{-324}...1,798 * 10^{308}$

Ordnungstruktur

- Durch $\leq$ ist auf $\mathbb{R}$ eine vollständige Ordnungsrelation erklärt.
- Verträglichkeit mit der algebraischen Struktur: Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt:

- $x \leq y \rightarrow x + z \leq y + z$
- $(x \leq y) \wedge (z \geq 0) \rightarrow x * z \leq y * z$
- $(x \leq y) \wedge (z \leq 0) \rightarrow x * z \geq y * z$

Für die Strikte Ordnung $<$ gilt: $(x < y) \wedge (z < 0) \rightarrow xz > yz$

Diskussion
$|a - b|$ = Abstand der Zahlen a und b auf der Zahlengeraden
Speziell: $|a|$ ... Abstand von a zum Ursprung 0

Lösen von Ungleichungen

Bsp. 14 (Ungleichungen und Beträge
Gesucht ist die Lösungsmenge L der reellen Zahlen, die die Ungleichung erfüllen
$(*)|x - 1| < 3 * \frac{1}{2}x$

- "kritische Stelle(n)": Eine Nullstelle des Terms innerhalb der Betragsstriche, also $x = 1$
  Darauf erfolgt eine Fallunterscheidung. Dabei jeweils Beträge auflösen

- 1 Fall: $x < 1$, das bedeutet $x - 1 < 0$
  $(*) \leftrightarrow -(x - 1) < 3 + \frac{1}{2}x$
  $(*) \leftrightarrow -\frac{3}{2}x < 2| : (-\frac{3}{2})$
  $(*) \leftrightarrow x > -\frac{4}{3}$

  $L_1 = \{x|x < 1 \wedge x > -\frac{4}{3}\} - (-\frac{4}{3}; 1)$

- 2 Fall: $x \geq 1$, $(*) \leftrightarrow (x-1) < 3 + \frac{1}{2}x$
  $(*) \leftrightarrow \frac{1}{2}x < 4| : \frac{1}{2}$
  $(*) \leftrightarrow x < 8$

  $L_2 = \{x | x \geq 1 \wedge x < 8\} = [1, 8)$
  $L = L_1 \wedge L_2 = (-\frac{4}{3}, 8)$

Bsp. 15 Ungleichungen mit gebrochen rationalen Funktionen
$(*)\frac{x}{x+1} < 1| * (x+1)$
Falls $x + 1 < 0$ kehrt sich Ungleichheitszeichen um!
Fallunterscheidung:

- kritische Stelle(n): Nenner-Nullstelle(n), hier $x = -1$
- 1 Fall: $x < -1$ (d.h. $x + 1 < 0 \longleftarrow (*) \leftrightarrow x > x + 1 \leftrightarrow 0 > 1$
- 2 Fall: $x > -1$ $(*) \longleftarrow x < x + 1 \leftrightarrow 0 < 1$
  $L_2 = \{x | x > -1) \wedge 0 < 1\} = (-1; \infty)$

Bsp. 16 quadratische Ungleichungen

$$x^2 + 3x < 10 \leftrightarrow (x + \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} < 10$$

$$x^2 + 3x < 10 \leftrightarrow (x + \frac{3}{2})^2 < \frac{49}{4}$$

$$x^2 + 3x < 10 \leftrightarrow |x + \frac{3}{2}| < \frac{7}{2}$$

$$x^2 + 3x < 10 \leftrightarrow -\frac{7}{2} < x + \frac{3}{2} < \frac{7}{2}$$

$$x^2 + 3x < 10 \leftrightarrow -5 < x < 2$$

Diskussion
In vielen Fällen ist auch ein graphischer Lösungsansatz möglich. Dabei sind geeignete Schnittpunkte (siehe Gleichung) extakt rechnerisch zu ermitteln, anschließend Ungleichheitszeichen betrachten.
Im Beispiel 16:

$$x^2 + 3x < 10 \leftrightarrow \underbrace{x^2 + 3x - 10}_{=:f(x)} < 0$$

Nulstelle von $f(x)$

$$x^2 + 3x - 10 = 0 \to x_1 = -5, x_2 = 2$$

Schranken und Grenzen

- Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt nach oben beschränkt, wenn es eine obere Schranke gibt, vgl. Kap. 1.2. Man kann zeigen, dass es bei dieser Ordnungsrelation ($\leq$) auf $\mathbb{R}$ dann auch eine kleinste obere Schranke s gibt (= Supremum sup M, s = max M falls $s \in \mathbb{M}$)
- Analog: nach unten beschränkt, Infinium, Maximum
- Falls M nicht nach oben beschränkt ist, d.h. falls gilt:

  $$\exists_{a\in\mathbb{R}}\forall_{x\in\mathbb{M}} x \leq a = \forall_{a\in\mathbb{R}}\exists_{x\in\mathbb{M}} x > a$$

  Schreibweise: sup $M := \infty$
- Analog: inf $M = -\infty$, falls M nicht nach unten beschränkt
- M heißt beschränkt, falls M nach oben und unten beschränkt ist.

Bsp. 17

$$M = \{1 + \frac{1}{x} | n \in \mathbb{N}*\}$$

- obere Schranken: z.B. $3712; \pi; 2,01$
  kleinste obere Schranke sup M = max M = 2
- untere Schranken: z.B. $-31; 0; 0,99$
  größte untere Schranke inf $M = 1$
  $1 \notin M \rightarrow$ min M existiert nicht!

Komplexe Zahlen

Motivation: z.B. hat $x^2 = -1$ im Bereich der reellen Zahlen nicht lösbar $\rightarrow$ Zahlenbereichserweiterung.

Begriffe, Rechenregeln
Die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist eine Obermenge der Menge, der reellen Zahlen mit folgendem Eigenschaften:

- $\mathbb{C}$ enthält eine Zahl i mit $i^2 = -1$ (oft auch mit j bezeichnet)
- Jede komplexe Zahl z lässt sich in der Form $z = x + i * y$ $(x, y \in \mathbb{R})$ darstellen.
  Dabei $x = R_e(z)$... Realteil und $y = I_m(z)$... Imaginärteil
- Auf $\mathbb{C}$ werden die Operationen $+$ und $*$ wie folgt erklärt:
  Es seien $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$
  Dann:
  $z_1 + z_2 := x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2) \rightarrow z_1 * z_2 := x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$
  Die Menge $\mathbb{C}$ wird mit diesen Operationen zum Körper der komplexen Zahlen.
  Die arithmetischen Operationen erfolgt unter Beachtung von $i^2 = -1$ wie im Realteil
- Auf $\mathbb{C}$ gibt es keine natürliche Ordnungsrelation

Veranschaulichung: GAUSSsche Zahlenebene
Zahl $z \leftrightarrow$ Punkt $P(x, y) \leftrightarrow \overrightarrow{OP}$ (Vektor)

- Betrag von z: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- Hauptargument von z: orientierter Winkel φ von positiver x-Achse zum Strahl $\overrightarrow{OP}$ (gemeinsam auf kürzestem Weg)
  $\rightarrow$ Arg $z := \varphi(-\pi < \varphi \leq \pi)$
- $\overline{z} = x - y$... die zu $z = x + iy$ konjugierte komplexe Zahl

Diskussion

- Falls nicht notwendig kürzester Weg gewählt wird $\rightarrow$ Argument arg $z =$ Hauptargument $z + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
  z.B. $z = 1 - i$
- Berechnung von Arg $z(z \neq 0)$: $cos\varphi\frac{x}{|2|}$
  Arg z = arcus $(\frac{x}{|z|}$ falls $y \geq 0$
  Arg z = -arcus $(\frac{x}{|z|})$ falls $y < 0$

Bsp. 18
$z_1 = 3 + 4i; z_2 = -12 - 5i$

- Betrag und Hauptargument

$$|z_1| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$
$$\varphi_1 = \text{Arg} z_1 = \text{arccos}\frac{3}{5} = 53,13$$
$$|z_2| = \sqrt{(-12)^2 + (-5)^2} = 13$$
$$\phi_2 = \text{Arg} z_2 = -\text{arccos}\frac{-12}{13} = -157,38$$

- Arithmetische Operationen
  - Addition: $z_1 + z_2 = -9 - i$
  - Subtraktion: $z_1 - z2_2 = 15 + 9i$
  - Multiplikation: $z_1 * z_2 = -36 - 15i - 48i - 20 \underbrace{i^2}_{-1}$
  - Division: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} * \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}}$
    Also

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3+4i}{-12-5i} * \frac{-12+5i}{-12+5i} = \frac{-36+15i-48i+20i^2}{144+25} = -\frac{56}{169} - \frac{33}{169}i$$

Trigonometrische Darstellung, EULERsche Formel experimentelle Darstellung

$x = |z| * \cos(\varphi)$
$y = |z| * \sin(\varphi)$

$$z = x + iy \rightarrow \text{arithmetische Darstellung}$$
$$z = |z| * (cos(\varphi) + i * sin(\varphi)$$

Diskussion

$$z_1 = |z_1|(\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1); [z_1 = |z_1|(\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2)$$
$$z_1 * z_2 = |z_1| * |z_2| * (\underbrace{cos(\varphi_1) * cos(\varphi_2) - sin(\varphi_1) * sin(\varphi_2)}_{cos(\varphi_1+\varphi_2)}$$
$$|z_1| * |z_2| * (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i * \sin(\varphi_1 + \varphi_2)$$

Folgerung

- $$|z_1 * z_2| = |z_1| * |z_2|, arg(Z_1 * z_2) = arg(z_1) + arg(z_2)$$

- analog für $(z_2 + 0)$
$$|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = arg(z_1) = arg(z_2)$$

- Es ist sinnvoll zu definieren:
$$e^{i*\varphi} := \cos(\varphi) + i * \sin\varphi$$

Diskussion

- Exponentielle Darstellung von z:
$z = |z| * e^{i*\varphi}$

- Wegen der Formeln (1) und (2) bleiben für diese Darstellung die von Reellen her bekannten Potenzgesetze gültig Inbesondere gilt die Formel von MOIVRE
$z^n = (|z| * e^{i*\varphi})^n = |z|^n * e^{in\varphi}$

Bsp. 19

- a)
$$z_1 = \underbrace{3 + 4i}_{arithmetisch} = \underbrace{5(\cos(53,13) + i * \sin(53,13)}_{[trigonometrisch]} = \underbrace{5 * e^{i*53,13}}_{expotentiell}$$

- b) $z = -1 + i$, gesucht z^{12}
$$|z| = \sqrt{2}, \text{ Arg}z = \arccos(\frac{-1}{\sqrt{2}}) = 135 = -\frac{3 * \pi}{4} \rightarrow 2 = \sqrt{2} * e^{i + \frac{3*\pi}{4}}$$
$$\rightarrow \sqrt{2}^{12} * e^{i*12*\frac{3*\pi}{4}} = 2^6 * e^{i*9\pi} = 64 * e^{i*\pi}$$

Spezielle Gleichungen

Quadratische Gleichungen
$z^2 = pz + q = 0 (p, q \in \mathbb{R})$
$\leftrightarrow (z + \frac{p}{2})^2 = \frac{p^2}{4} - q$ (*)

- 1 Fall: $\frac{p^2}{4} - q \geq 0 \rightarrow z_{1|2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$
- 2 Fall: $\frac{p^2}{4} - q < 0 \rightarrow (*) \leftrightarrow (z + \frac{p}{2})^2 + \underbrace{q - \frac{p^2}{4}}_{=:a^2>0} = 0$

  $Z_{1|2} = -\frac{p}{2} \pm i * \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$

Praktisches Vorgehen: Lösungsformel (L) stets anwenden im Fall 2.

Bsp. 20

$$x^2 + 28X + 200 = 0$$

$$X_{1|2} = -15 \pm \sqrt{\underbrace{196 - 200}_{4}} = -14 \pm 2i$$

Kreisteilungsgleichung
$z^n = b, b \in \mathbb{C}$
Lösung

- b exponentiell darstellen
  $b = |b| * e^{i*„}, „ = Arg(b)$
- (*) besitzt die folgenden Lösungen
  $z_k = \sqrt{n}_{|b|} * e^{i*\frac{„+k*360}{n}}, k = 0, 1, 2, ..., n-1$

  Zum Beweis: $z = r * e^{i*\varphi} \to z^n = r^n * e^{i*n*\varphi} = |b| * e^{i*„}$
  - $r^n = |b| \to r = \sqrt{n}_{|b|}$
  - $n * \varphi = „ + k * 360 \to \varphi = \frac{„+k*360}{n}$

Bsp. 21

$$z^4 = -16(b = -16 \to |b| = 16; „ = \pi = 180)$$

d.h. $z^4 = 16e^{i*180}$

$$z_n = 2 * e^{i*\frac{180+k*360}{4}} = 2 * e^{i*45+k*90}(k = 0, 1, 2, 3)$$

$$z_0 = 2 * e^{i*45}$$
$$= \sqrt{2} + \sqrt{2} * i$$

$$z_1 = 2e^{i*135}$$
$$= -\sqrt{2} + \sqrt{2} * i$$

$$z_2 = 2 * e^{i*225}$$
$$= -\sqrt{2} - \sqrt{2} * i$$

$$z_3 = 2e^{i*315}$$
$$= \sqrt{2} - \sqrt{2} * i$$

Anwendung im Wechselstromkreis

- Spule, Stromstärke $I = I_m \cos(\omega * t) + i * \sin(\omega * t)$
  Spannung: $U = \omega * L * I_m(\cos(\omega * t + \frac{\pi}{2}) + i * \sin(\omega * t + \frac{\pi}{2})$
  $I = I_m * e^{i*\omega*t}, U = \omega * L * I_m * e^{i*(\omega*t+\frac{\pi}{2})} = \omega * L * \underbrace{I_m * e^{i*\omega*t}}_{I} * \underbrace{e^{i*\frac{\pi}{2}}}_{i}$
  $R = \frac{U}{I} \rightarrow$ Induktiver Widerstand ($R_L = \omega * L * i$). Dabei L... Induktivität $[\frac{VS}{A} = H]$... Henry

Reellwertige Funktionen einer reellen Veränderlichen

Elementare Funktionen (Teil 1)

Polynome

Definition 1

$$y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x * a_0$$

$$a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$$

heißt ganze rationale Funktion oder Polynom vom Grade n, falls $a_n \neq 0$

- Zur Berechnung der Funktionswerte zweckmäßig:
  HORNER-Schema, vgl. Stellenwertsysteme.
- HORNER-Schema liefert gleichzeitig das Ergebnis der Division durch den Linearfaktor $(x - x_0)$, vgl. Bsp. 1

Bsp. 1
$f(x) = x^5 - 2x^3 + x^2 - 6, x_0 = 3$
gesucht: $f(x_0), f(x) : f(x - x_0)$

Satz 1
Es sei $f(x) = p_n(x) = a_n x^n + ... + a_0$ ein Polynom vom Grade n (d.h. $a_n \neq 0$). Dann besitzt f in $\mathbb{C}$ genau n Nullstellen $x_1, ..., x_n$ und es gilt:

$$\underbrace{f(x) = a_n(x - x_1) * (x - x_2) * ... * (x - x_n)}_{\text{Zerlegung in Linearfaktoren}}(*)$$

Diskussion

- Falls in (*) ein Faktor $(x - x_0)$ genau k-mal vorkommt $(1 \leq k \leq n)$, so heißt x_0 eine k-fache Nullstelle.
- Nicht reelle Nullstellen sind möglich, sie treten stets paarweise als konjugierte komplexe Zahlen $(x_o, \overline{x_0})$.
In diesem Falle Zusammenfassung der Linearfaktoren zu einem reellen quadratischen Faktor möglich:
$(x - x_0)(x - \overline{x_0}) = x^2 - (2 \text{ Re } x_0) * x + |x_0|^2$
- Falls $a_0, a_1, ..., a_n$ ganze Zahlen sind, so sind evtl. vorhandene, ganzzahlige Nullstellen stets Teiler von a_0
- Allgemeine Methoden zur Nullstellenbestimmung kommt später (Kapitel 3, Anfang Sommersemester)

Bsp. 2
$p(x) = x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6$
gesucht: Nullstelle

Durch (systematisches) Probieren, vgl. Diskussion 3: $x_1 = 2$
Teiler von 6: $\pm 1; \pm 2, \pm 3; \pm 6$

Zerlegung in Linearfaktoren $p(x) = (x - 2)(x + 3)(x - 1)(x + 1)$

Gebrochenrationale Funktionen

Definition 2

$$y = f(x) = \frac{p(x)}{g(x)} = \frac{a_m x^m + ... + a_1 x + a_0}{b_n x^n + ... + b_1 x + b_0}$$

$$(a_m \neq 0, b_n \neq 0, DB(f) = \{x \in \mathbb{R} | q(x) \neq 0\})$$

heißt gebrochenrationale Funktion.
f heißt echt gebrochen, wenn $m < n$ und unecht gebrochen, wenn $m > n$

Diskussion

- Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass Zähler und Nennerpolynom keine gemeinsamen Nullstellen besitzen (ansosnten: kürzen gemeinsamer Faktor in Zähler und Nenner)
- Die Nullstelle des Nennerpolynom heißen Polstellen der gebrochen rationalen Funktion (x_p... Polstelle, dann $\lim_{x \to x_p} |f(x)| = \infty$)
- Die Nullstelle des Zählerpolynoms sind die Nullstellen von $f(x)$
- Verhalten von $f(x)$ bei k-facher Nullstelle oder Polstelle.
  Vorzeichenwechsel $\leftrightarrow k$ ungerade
- Polynomdivison: $p(x) : q(x) = \underbrace{a(x)}_{\text{Polynom}} + \underbrace{\frac{r(x)}{q(x)}}_{\text{echt gebrochen}}$
  $y = a(x)$ ist die sogenannte Asymptote

Bsp. 3
$y = \frac{x^3+2x^2}{x^2-x-2} = \frac{x^2(x+2)}{(x+1)(x-2)} = x + 3 + \frac{5x+6}{x^2-x-2}$

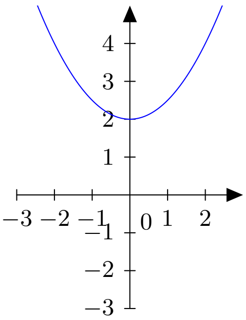
- Nullstelle: $x = 0$ (2-fach), $x = -2$
- Polstelle: $x = -1$, $x = 2$ (einfach $\to$ Vorzeichenwechsel)
- Asymptote: $y = x + 3$
  Schnittstellen und Asymptote: $5x + 6 = 0 \to x = -1,2$

Trigonometrische Funktionen
Übliche Definition der trigonometrischen Funktion (Kreisfunktionen).

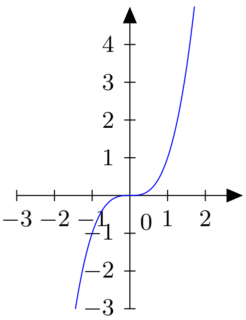
Definition 3
Eine Funktion $y = f(x)$ heißt periodisch, wenn es eine Zahl $p > 0$ gibt mit $f(x) = f(x + p)$ (für alle $x \in DB(f)$). Die kleinste positive Zahl p mit dieser Eigenschaft heißt Periode von p

Definition 4 Symmetrieeigenschaften
Eine Funktion $y = f(x)$ heißt

- gerade, wenn $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in DB(f)$ gibt.



- ungerade, wenn $f(-x) = -f(x)$



Diskussion

$y = f(x)$	DB(f)	Periode	Symmetrie
$y = \sin x$	$\mathbb{R}$	2π	ungerade
$y = \cos x$	$\mathbb{R}$	2π	gerade
$y = \tan x$	$R \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \vert k \in \mathbb{Z}\}$	π	ungerade
$y = \cot x$	$R \setminus \{k\pi \vert k \in \mathbb{Z}\}$	π	ungerade

Einige wichtige Formeln

$$sin^2x + cos^2x = 1$$
$$tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$$
$$cot(x) = \frac{\cdot}{\tan x}$$
$$sin(2x) = 2\sin x * \cos x, \cos 2x = 2(\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x)$$

Exponentialfunktionen

- Wichtige Potenzgesetze: $a^{x_1} * a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$ usw...
- Besondere Bedeutung besitzt die Funktion

$$y = e^x (x \in \mathbb{R} \text{ mit e } = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = 2,71822818284...$$

Hyperbelfunktionen

Definition 5
$y = \cosh x := \frac{1}{2} * (e^x + e^{-x}), x \in \mathbb{R}$
$y = \sinh x := \frac{1}{2} * (e^x - e^{-x}), x \in \mathbb{R}$
$y = \tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x}, x \in \mathbb{R}$
$y = \coth x := \frac{1}{\cosh x}, x \neq 0$

Wichtig:
$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
Ferner: $y = \cosh x$ ist gerade, die anderen Hyperbel Funktionen sind ungerade

Umkehrfunktion

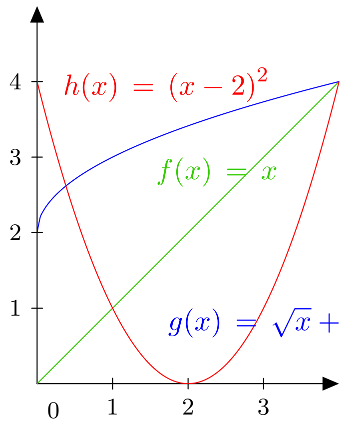
- Zur Erinnerung: $y = f(x), x \in DB(f)$ heißt injektiv (umkehrbar eindeutig), wenn es zu jedem Bild $y \in Wb(E)$ genau ein Vorbild $x \in Db(f)$ mit $y = f(x)$ gibt, d.h. $\underbrace{y}_{Wb(f)} \longrightarrow \underbrace{x}_{Db(f)} =: f^{-1}(y)$

  Die dadurch erklärte Funktion$f^{-1}|Wb(x) \to Db(f)$ heißt Umkehrfunktion f^{-1} von f
  Es gilt: $Db(f^{-1} = Wb(f), Wb(f^{-1} = Db(f)$
- Bilden der Umkehrfunktion zu $y = f(x), x \in Db(f)$
  - Auflösen der Funktionsgleichung $y = f(x)$ nach x: $x = f^{-1}(y)$
    falls das eindeutig möglich ist, andernfalls existiert f^{-1} nicht.
  - Oft erfolgt noch eine Vertauschung von x und y
    $y = f^{-1}(x), x \in Db(f^{-1}) = Wb(f)$

    Vertauschung entspricht geometrisch einer Spiegelung an der Geraden $y = x$, vgl. Bsp. 4

Bsp. 4
$y = f(x) = \sqrt{x} + 2, x \in [0, \infty)$

- Auslösung nach x: $y = \sqrt{x} + 2 \to \sqrt{x} = y - 2 \to x = (y - 2)^2 = f^{-1}(y)$
  $Db(f^{-1} = Wb(f) = [2, \infty)$
- Vertausche x und y: $y = f^{-1} = (x - 2)^2, Db(f^{-1} = [2, \infty)$



Definition 6
Die reellwertige Funktion $y = f(x)$ heißt

- streng monoton wachsend, falls $x_1 < x_2 \to f(x_1) < f(x_2)$
- monoton wachsend (=nicht fallend), falls $x_1 < x_2 \to f(x_1) \leq (x_2)$

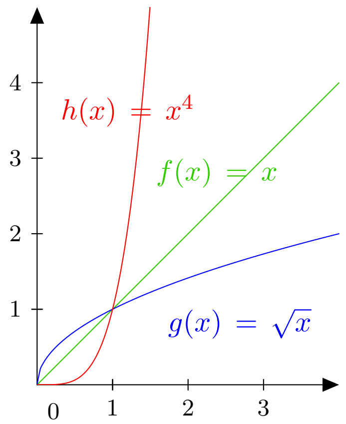
Analog
streng monoton fallend bzw. monoton fallend (= nicht wachsend)

Satz 2
f streng monoton $\to$ f injektiv
d.h. f^{-1} existiert.

Elementare Funktionen (Teil 2)

Wurzel und Logarithmusfunktionen

Definition 7
$y = x^{\frac{1}{x}} = \sqrt[n]{x}(x \geq 0, n \in \mathbb{N}*)$
ist die Umkehrfunktion zu $y = x^n(x \geq 0, n \in \mathbb{N}*)$



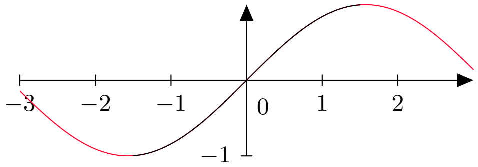
Diskussion

- Im Bereich der reellen Zahlen ist $\sqrt[n]{x}$ nur für $x \geq 0$ erklärt, der Funktionswert ist selber nicht negativ
- Lässt man in $x^{\frac{1}{n}}$ negative x zu, (z.B. $\sqrt[3]{-8}$), so ergeben sich Widersprüche.
  $\sqrt[3]{-8} = -2 \rightarrow -2 = (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}}...$

Definition 8
$y = log_a x(a > 0, a \neq 1, x > 0)$ ist die Umkehrfunktion zu $y = a^x(x \in \mathbb{R})$
Diskussion

- Log Gesetze:
  - $log(xy) = log(x) + log(y)$
  - $log(\frac{x}{y}) = log(x) - log(y)$
  - $log(x^a) = a * log(x)$
- Es gilt: $a^x = e^{x*ln(a)}(= e^{ln(a)})^x$

Arcusfunktionen
Vorbetrachtung: $y = f(x) = \sin x$ ist nicht injektiv, also ex. keine Winkelfunktion



Aber: $y = \sin x$ für $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ist injektiv, also umkehrbar.

Beispiel 5
Gesucht sind alle Lösungen der Gleichung $tan(2x) = y$. Es sei $2x \in (\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$
$y = tan(2x) = tan(2x - k\pi)$ mit $2x - k\pi \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$
$2x - k\pi = arctan(y) \rightarrow x = \frac{1}{2}(k\pi + arctan(y), k \in \mathbb{Z}$
Areafunktionen

Definition 10
Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktion.

Winkelfunktion			
$y = \underbrace{ar}_{area} sinh(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$y = sinh(x), x \in \mathbb{R}$
$y = arcosh(x)$	$[1, \infty)$	$[0, \infty)$	$y = cosh(x), x \geq 0$
$y = artanh(x)$	$(-1, 1)$	$\mathbb{R}$	$y = tanh(x), x \in \mathbb{R}$
$y = arcoth(x)$	$\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$y = coth(x), x \neq 0$

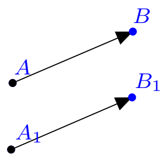
Lineare Algebra
Vektorräume

Definition

- Gegeben seien ein Körper $(K, +, *)$, dessen Elemente Skalare heißen (meist $(\mathbb{R}, +, *)$) und eine ABELsche Gruppe $(V, \oplus)$ (V... Menge, Elemente heißen Vektoren $\oplus$... sogenannte Vektoraddition)
- Es gibt eine Abbildung $\odot$ von KxV in V, die jedem $x \in \mathbb{V}$ und jedem $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Element $\lambda \odot x \in \mathbb{V}$ zugeordnet (die sogenannte Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar) mit folgenden Eigenschaften
  - **Distributivgesetz**: $(\lambda + \mu) \odot x = (\lambda \odot x) + (\mu \odot x)$
    $\lambda \odot (x \oplus y) = (\lambda \odot x) \oplus (\lambda \odot y)$
  - **Ass. Gesetz** $(\lambda * \mu) \odot x = \lambda \odot (\mu \odot x)$

EIne Menge $\mathbb{V}$ mit dem in (1) und (2) aufgeführten Operatoren $\oplus$ und $\odot$ heißt Vektorraum (VR) über K
Bemerkung: Schreibweise meist $\oplus = +$ und $\odot = *$

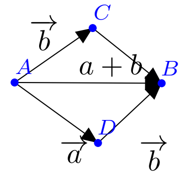
Beispiel 1
Skalarbereich $K = \mathbb{R}$
Vektoren: Größen, die durch eine Zahlenangabe (z.B. Länge) und eine RIchtung charakterisiert sind. (z.B. Kräfte, Geschwindigkeiten...)



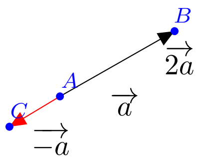
Pfeile als Repräsentation eines Vektors a, Bezeichnung $a = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$
auch $\overrightarrow{a}$

Ortsvektor
Angeheftet an einem gemeinsamen Anfangspunkt. O (Ursprung)

Vektoraddition: $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$



Mulitplikation mit Skalar: $\lambda * \overrightarrow{a}$
$\lambda > 0$ ... gleiche Richtung
$\lambda < 0$ ... entgegengesetze Richtung



Subtraktion $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$
$(:= \overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{b}))$

Beispiel 2

$$K = \mathbb{R}, v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{pmatrix} | x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}, ..., x_n \in \mathbb{R}$$

Menge sogenannter Spaltenvektoren

- Vektoraddition:
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$
- Multiplikation mit Skalar:
$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

Definition 1
Die Vektoren $\overrightarrow{a_1}, ...\overrightarrow{a_n}$ heißen linear unabhängig, wenn die Gleichung
$x_1\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + ... + \overrightarrow{a_n} = \overrightarrow{0}$ (*)
nur die trivale Lösung $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ besitzt.

Diskussion

- $x_1\overrightarrow{a}_1 + ... + x_n\overrightarrow{a}_n$ heißt Linearkombination (LK)
- Falls es ein LK der Gestallt (*) gibt, in der nicht alle x_i gleich 0 sind, so heißen $\overrightarrow{a}_1, ..., \overrightarrow{a}_n$ linear Abhängig.

  In diesem Falle läst sich wenigstens einer der Vektoren als LK der anderen darstellen.

Definition 2
Es sei $V_1 \subseteq \mathbb{V}$ eine nichtleere Teilmenge von V. Wir bezeichnen mit $L(V_1)$ die Menge aller LK von jeweils endlich vielen Vektoren aus V_1.
$L(V_1)$ heißt lineare Hülle von V_1.

Bemerkung
$L(V_1)$ ist selbst ein VR, der von V_1 aufgespannter Teilraum von V.

Definition 3

- Ein VR V heißt n-dimensional, wenn es n unabhängige Vektoren $\overrightarrow{a}_1...\overrightarrow{a}_n$ gibt, die den gesamten Raum aufspannen. $V = L(\overrightarrow{a}_1, ..., \overrightarrow{a}_n)$
- Die Menge der Vektoren $\overrightarrow{a}_1, ..., \overrightarrow{a}_n$ nennt man in diesem Falle eine Basis von V.

Diskussion
In jedem Vektorraum gibt es unterschiedliche Basen, jedoch ist die Anzahl der Vektoren, die eine Basis bilden stehts gleich (Dimension des Vektorraumes).

Satz 1
Es sei $a_1, ..., a_n$ eine Basis eines VR V. Dann gibt es für jedes $\overrightarrow{x} \in \mathbb{V}$ eine eindeutige Darstellung der Gestallt:
$x = x_1a_a + x_2a_2 + ... + x_na_n$

Bemerkung
Die Koeffizienten $x_1, ..., x_n$ heißen Koordinaten von x bezüglich der Basis $a_1, ..., a_n$.
Die Summanden $x_1 a_1, ..., x_n a_n$ heißen Komponenten von x bezüglich der Basis $a_1, ..., a_n$

Beispiel 4
Zwei Vektoren $\overrightarrow{a}_1 \neq \overrightarrow{0}$ und $\overrightarrow{a}_2 \neq \overrightarrow{0}$ in einer Ebene bilden genau dann eine Basis, wenn sie nicht parallel sind.

Matrizen

Definition 4
Ein aus $m * n$ Zahlen $a_{ij} \in \mathbb{R}$, welche in m Zeilen und n Spalten angeordnet sind, bestehendes Schema heißt Matrix vom Typ (m, n)

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

Rechenoperationen

Definition 5

$\underline{A} = (a_{ij}, \underline{B} = (b, j)$ seien vom gleichen Typ (m, n).

$$\underline{A} + \underline{B} := (a_{ij} + b_{ij})$$

Addition einer Matrix

Es sei $\lambda \in \mathbb{R}, \underline{A} = (a_{ij})$

$$\lambda * \underline{A} := (\lambda * a_{ij})$$

Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar

$\underline{A} = (a_{ij}$ sei vom Typ (m, n)
$\underline{B} = (b_{jk}$ sei vom Typ (n, p)

A und B heißen in dieser Reihenfolge verkettet (Spaltenanzahl von A = Zeilenzahl von B)
Dann

$$\underline{A} * \underline{B} = (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk})$$

Matrizen Multiplikation

Diskussion
Zweckmäßig FALK-Schema für die Matrix-Multiplikation (vgl. Bsp. 5)

Definition 6
Die aus der (m, n)-Matrix $\underline{A}$ durch Vertauschen von Zeilen und Spalten entstehende (n, m)-Matrixheißt die Transponierte von $\underline{A}$.
Bezeichnung: $\underline{A}^T$

Beispiel 5

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \underline{B} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \underline{C} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ „ & 3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A} + \underline{C} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \; 2 * \underline{A} = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\underline{B}^T = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\underline{B}}_{2,3} * \underbrace{\underline{A}}_{2,2}$$

existiert nicht!, nicht verkette!

$$\underbrace{\underline{A}}_{2,2} * \underbrace{\underline{B}}_{2,3}$$

Bemerkung
Matrizen-Multiplikationen ist in der Regel nicht kommutativ.

Diskussion Ausgewählte Rechenregeln

- Die Menge der Matrizen vom gleichen Typ bildet mit den Operationen (1) und (2) aus Definition 5 einen Vektorraum.
- Falls die entsprechenden Typ-Voraussetzungen erfüllt sind, gelten
  - $(AB)C = A(BC)$ Assoziativitätsgesetz
  - $A(B + C) = AB + AC$ Distributivgesetz
  - $(A + B)C = AC + BC$ Distributivgesetz
  - $(\lambda A)^T = \lambda * A^T, (A^T)^T = A$
  - $(A + B)^T = A^T + B^T, (AB)^T = B^T A^T$

- Achtung: Im allgemeinen gilt AB + BA!
- FALK-Schema bei fortgesetzter Multiplikation. $A * B * C$

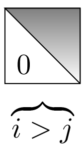
	B	C
A	AB	(AB)C

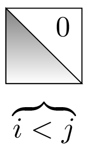
oder

	C
B	BC
A	A(BC)

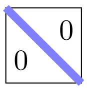
Spezielle Matrize

- Quadratische Matrizen: Typ (n, n)
  Eine quadratische Matrix A heißt
  - Symmetrisch, wenn $A^T = A$ gilt
  - obere/untere Dreiecksmatrix, wenn $a_{ij} = 0$ für $\begin{cases} i > j \\ i < j \end{cases}$

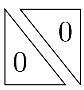




  - Diagonalmatrix, wenn $a_{ij} = 0$ für $i \pm j$



  - Einheitsmatrix E, wenn $a_{ij} =$
    Spezielle Diagonalmatrix, oft auch mit I bezeichnet.)



- Nullmatrix $\underline{O}$ (sämtliche Elemente $= 0$, nicht notwendig dass sie quadratisch sind)
- Matrizen vom Typ $(n, 1)$ (n zeichen, 1 Spalte)
  heißen (Spalten-)Vektoren

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

  Es ist dann $a^T = (a_1|a_2|\dots|a_n)$ vom Typ $(1, n)$ (Zeilen Vektor)

Diskussion

- Die quadratischen Matrizen vom Typ (n, n) bilden mit den Operationen Matr. Addition und Matr. Multiplikation enen nicht kommutativen Ring.
- $A^0 := E, A^n = \underbrace{A * A * \cdots * A}_{\text{n Faktoren}}, n \in \mathbb{N}^*$
- Falls die entsprechenden Typ-Voraussetzungen erfüllt sind, gelten
  $A * E = A$
  $E * A = A$
  $0 * A = 0$
  $A * 0 = 0$
  $A + 0 = A$
- Es sei A vom Typ (m, n), $x \in \mathbb{R}^n$, d.h. vom Typ $(n, 1)$
  Dann ist $y = \underbrace{A}_{m,n} * \underbrace{c}_{n,1}$ vom Typ $(m, 1)$, also $y \in \mathbb{R}^m$

  Durch die Zuordnung $x \to Ax$ wird eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ beschrieben. Eine Abbildung f heißt linear, wenn
  $f(x + y) = f(x) + f(y), f(ax) = a * f(x) \forall_{x,y \in DB(f)}, \forall_{a \in \mathbb{R}})$ gilt.

Determinanten

Definition 7
Jeder n-reihigen quadratischen Matrix A ist eindeutig eine Zahl $det(A)$, die sogenannte Determinante von A wie folgt zugeordnet.

$n = 1 : det(a_{11}) := a_{11}$

$$n \geq 2 : det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} := a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

Dabei ist $A_{ij} = (-1)^{i+j} * det(U_{ig})$ die Adjunkte des Elementes a_{ij}

$U_{ij} \dots (n-1)$-reihige Unter Matrize, die durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte von A entsteht
Bezeichnung:

$$det(A) = det \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Bsp. 6a

$$n = 2 : \begin{bmatrix} a_{11} & & a_{12} \\ & \times & \\ a_{21} & & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1} * a_{22} + a_{12} * (-1)^{1+2} + a_{21}$$
$$= a_{11} * a22 - a_{12}a_{21}$$

Bsp. 6b

$$n = 3 : \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$= a_{11} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

Regel von SARRUS, nur für 3-reihige Determinaten!

Satz 2

- $det(\underline{A} * \underline{B}) = det\underline{A} * det\underline{B}$
- $det(\underline{A}^T) = det\underline{A}$

Wegen Satz 2b gelten alle im folgenden für die Zeilen formulierten Eigenschaften sinngemäß auch für die Spalten.

Satz 3 (Eigenschaften der Determinante)

- $\underline{B}$ gehe aus $\underline{A}$ durch Vertauschen zweier Zeilen hervor. Dann gilt $det\underline{B} = -det\underline{A}$
- Es gilt $det\underline{A} = 0$, falls zwei Zeilen elementweise propotioniert sind bzw. falls alle Elemente einer Zeile gleich 0 sind.
- Es gilt:
$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{in} \\ \lambda a_{i1} & \dots & \lambda a_{in} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{in} \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$
- Der Wert einer Determinante ändert sich nicht, wenn das λ-fache einer Zeile elementeweise zu einer anderen Zeile addiert wird.
- $$det\underline{A} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \text{ Entwicklung nach i-ter Zeile, i = 1, ..., n)}$$
$$det\underline{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}Aij \text{ Entwicklung nach j-ter Spalte, j = 1, ..., n)}$$

Bsp. 7
Prinzip: Nullen erzeugen mit (E4), Entwicklungssatz (E5) anwenden.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & -5 & -4 \\ -2 & 1 & -4 & 2 \\ 6 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 7 & 3 & -1 \\ -32 & -8 & -5 & -4 \\ -26 & -7 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{(-1) * (-1)^{4+3}}_{1} * \begin{bmatrix} 19 & 7 & -1 \\ -32 & -8 & -4 \\ -26 & -7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 7 & -1 \\ -108 & -36 & 0 \\ 12 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{(-1) * (-1)^{1+3}}_{-1} * \begin{bmatrix} -108 & -36 \\ 12 & 7 \end{bmatrix} = (-1) * (-36) * \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 12 & 7 \end{bmatrix} = 36 * 9 = 324$$

Anwendungen

- Vektorrechnung im $\mathbb{R}^3$
- Gegebenes lineares Gleichungssystem (n Gleichungen, n Unbekannte)
  Matrixform

$$\underline{A}\underline{x} = \underline{b} \text{mit} \underline{A} = (a_{ij}), x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

(*) besitzt genau dann eine eindeutige Lösung $\underline{X}$, wenn $det\underline{A} \neq 0$.
In diesem Fall gilt $x_j = \frac{det\underline{B}_j}{det\underline{A}} (j = 1, ..., n)$ wobei B_j aus $\underline{A}$ hervorgeht, indem die j-Spalte von $\underline{A}$ durch $\underline{b}$ ersetzt wird. (CRAMERsche Regel, theoretische Bedeutung, praktisches Vorgehen, vgl. nächsten Abschnitt)

Lineare Gleichungssysteme, Rang einer Matrix, Inverse

Das Austauschverfahren
geg: System von m linearen Funktionen mit den unabhängigen Variablen $x_1, ...x_n$ und den abhängen Variablen $y_1, ..., y_m$:

$y_1 = a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n + a_{10}$
...
$y_m = a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n + a_{m0}$

Beispiel 8
Betrieb, m Abteilungen, n Produkte $P_1, ..., P_n$
a_{ij}... Kosten pro Einheit von P_j die in Abteilung i entstehen
a_{i0}... Fixkosten von Abteilung i
x_j... produzierte Menge von P_j
y_i... Gesamtkosten von Abteilung i

Matrix-Schreibweise:

$$\underline{y} = \underline{Ax} + \underline{a} \text{ mit } \underline{A} = (a_{ij}, \underline{a} = \begin{pmatrix} a_{10} \\ \vdots \\ a_{m0} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

	x_1	$\dots$	x_m	1
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
y_m	a_{m1}	$\dots$	a_{mn}	a_{m0}

Aufgaben

- $\underline{x}$ vorgegeben, $\underline{y}$ ist zu berechnen (klar)
- $\underline{y}$ vorgeben, $\underline{x}$ ist zu berechnen (nicht immer lösbar, falls lösbar, nicht immer eindeutig)

Lösungsprinzip
Man tausche so oft wie möglich y_r gegen x_s aus = Austauschschnitt AS ($y_r \leftrightarrow x_s$)

Austauschverfahren

- AS $y_r \leftrightarrow x_s$ bedeutet.
  - r-te Zeile $y_r = ...$ auflösen nach $x_s \to x_s = ...$ (*)
  - In den an-
    deren Zeilen x_s durch die rechte Seite von (*) ersetzen $\to$ neue Tabelle T2

Die Koeffizienten
a_{ij}(*) in der neuen Tabelle entstehen aus den alten Koeffizienten a_{ij} wie folgt:

Austauschregeln
Abkürzungen:

- $p := a_{rs}$ (Pivotelement)
- PZ... Pivorzeile (Zeile r)
- PS...Pivotspalte (Spalte s)

AR1: $a_{rs}^* = \frac{1}{P}$
AR2: $a_{rj} = \frac{a_{rs}}{-P}$ wobei $j \neq s$

"neue Pivotzeile" - alte Pivotzeile

AR3: $a_{is}^* = \frac{a_{is}}{p}$ wobei $(i \neq r)$
"neue Pivotspalte" - alle Pivotspalten/Pivot

AR4: $a_{ij}^* = a_{ij} + a_{is} * a_{rj}^*$ wobei $i \neq r, j \neq s$

Praktisches Vorgehen

- Pivot Kennzeichnen $\bigcirc$
- Austauschregeln AR1 - AR4 abarbeiten

$\to$ Dabei für die Austauschregel 4 unter Tabelle die neue PZ als Kellerzeile schreiben.

Beispiel 8 Fortsetzung
$y_1 = z_{x1} + 3_{x2} + x_3 + 50$ ... Kosten in Abteilung 1 (Tabelle 1)
$y_2 = x_1 + 2_{x3} + 40$ ... Kosten in Abteilung 2 (Tabelle 2)

Tabelle 1

T1	x_1	x_2	x_3	1
y_1	2	3	1	50
y_2	1	0	2	40
K	-2	-3	*	-50

Tabelle 2

T2	x_1	x_2	x_3	1
x_3	-2	-3	1	-50
y_2	-3	-6	2	-60
K	*	-2	$\frac{2}{3}$	-20

Tabelle 3

T3	y_2	x_2	y_1	1
x_3	$\frac{2}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	-10
x_1	$-\frac{1}{3}$	-2	$\frac{2}{3}$	-20

d.h. $x_3 = \frac{2}{3}y_2 + x_2 - \frac{1}{3}y_1 - 10$
$x_1 = -\frac{1}{3}y_2 - 2x_2 + \frac{2}{3}y_1 - 20$

– Bei vorgegangenen Kosten y_1, y_2 ist die Lösung $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ nicht eindeutig bestimmbar; z.B. $y_1 = 600$, $y_2 = 300$

  $x_2 = t$ (frei wählbar)
  $x_3 = \frac{2}{3} * 300 + t - \frac{1}{3} * 600 - 10 = t - 10$
  $x_1 = -\frac{1}{3} * 300 - 2t + \frac{2}{3} * 600 - 20 = 280 - 2t$

  $$\underline{x} = \begin{pmatrix} 280 - 2t \\ t \\ t - 10 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \text{ (allgemeine Lösung)}$$

Varianten des Austauschverfahrens (AV)

- AVZ... AV mit Zeilentilgung, d.h. neue Pivotzeile in neuer Tabelle weglassen
- AVS... AV mit Spaltentilgung, d.h. in neuer Tabelle neue Pivotspalte weglassen (nur anwendbar, wenn Variable über der wegzulassenden Spalte = 0 ist)
- AVSZ... AVS + AVZ

Lineare Gleichungssysteme

- Gegeben sei das lineare Gleichungssystem (m Gleichungen mit n Unbekannten $x_1 ... x_n$)

  (1) $a_1 1 x_1 + ... + a_{1n} x_n = b_1$
  ...
  $a_{m1} x_1 + ... + a_{mn} x_n = b_m$
- Gleichungssystem (1) heißt homogen, falls $b_1 = b_2 = ... = b_m = 0$, sonst inhomogen
- Matrixform: $\underline{Ax} = \underline{b} \leftrightarrow \underline{Ax} - \underline{b} = \underline{0}$
- Äquivalente Form: (1') $\underline{y} = \underline{Ax} - \underline{b}$ mit $\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \underline{0}$

  Hilfsgrößen. $y_1 = ... = y_m = 0$
- Tabellenform: $\begin{array}{c|cc} & x^T & 1 \\ \hline y & \underline{A} & -\underline{b} \end{array}$

- **Lösungsprinzip** AVS
  * Alle y_i sind austauschbar → (1) ist lösbar, Lösung ist an letzter Tabelle (TE) ablesbar

TE	x_3	1
x_1	0	4
x_2	2	-3

  * Wenigstens ein y_i ist gegen kein x_j austauschbar.

	evtl. noch nicht ausgetauschte x_j	1
...	0...0	$\alpha(\rightarrow y_i = \alpha)$
...		

- $\alpha = 0$ Zeile y, kann getrichen werden $(0 = 0)$
- $\alpha \neq 0$ Gleichungssystem (1) nicht lösbar (Widerspruch! Da $y_j = 0$

Diskussion
Verfahren endet also entweder im Fall 2b (unlösbar) oder in Tabelle in der kein y_i mehr vorkommt (Fall 1 bzw. 2a)

$$(2)\quad \begin{array}{c|ccccc} \text{TE} & x_{s1} & x_{s2} & \dots & x_{sq} & 1 \\ \hline x_{r1} & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \vdots & & & & & \\ x_{rp} & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \end{array}$$

- $x_{r1}, ..., x_{rp}$ (ausgetauschte x_j) ... Basisvariable (BV)
  $x_{s1}, ..., x_{sq}$ (nicht ausgetauschte x_j) ... Nichtbasisvariable (NBV)
  $(p + q = n)$
- Allgemeine Lösung ergibt sich aus Endtabelle:
  NBV: frei wählbar (Parameter $\in \mathbb{R}$)
  BV: daraus berechenbar
- Falls keine NBV vorhanden $\rightarrow$ Lösung eindeutig

Definition 8:
Die Darstellung (2) heißt Basisdarstellung des linearen Gleichungssystems (1)

Diskussion
Aus einer Basis (2) lassen sich weitere gewinnen durch Austausch $\underbrace{x_{ri}}_{BV} \leftrightarrow \underbrace{x_{sj}}_{NBV}$

Bsp. 9

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 = -2$$
$$-5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -2$$
$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 10$$

T!	x_1	x_2	x_3	1
$y_1 = 0$	3	1	2	2
$y_2 = 0$	-5	-3	-2	2
$y_3 = 0$	1	3	-2	-10
K	-3	*	-2	-2

T2	x_1	x_3	1
x_2	-3	-2	-2
0	4	4	8
0	-8	-8	-16

T3	x_3	1
x_2	1	4
x_1	-1	-2
0	0	0

T3 ist Endtabelle (BV x_1, x_2, NBV: x_3)
allgemeine Lösung: $x_2 = x_3 + 4$
$x_1 = -x_3 - 2, x_3 \in \mathbb{R}$ (frei wählbar)

andere Form mit Parameter $x_3 = t$: $\underline{x} = \begin{pmatrix} \text{-t - 2} \\ \text{t + 4} \\ \text{t} \end{pmatrix}$

Bemerkung

- Bei homogenen Systemen $\underline{Ax} = \underline{0}$ muss die 1-Spalte $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ nicht geschrieben werden, "nur gedacht"!
- Die Methode AVS entspricht dem sogenannten GAUSS-JORDAN-Verfahren

Der GAUSSsche Algorithmus

- AVSZ (Spalten und Zeilentilgung)
- weggelassene Zeilen merken (Kellerzeilen)
- Rückrechnung

Bsp. 10

$$-x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4$$
$$2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 4$$
$$2x_1 + x_2 - 4x_3 = -3$$

T1	x_1	x_2	x_3	1
0	-1	2	2	-4
0	2	5	2	-4
0	2	1	-4	3
x_2	-2	$*$	4	-3

T2	x_1	x_3	1
0	-5	10	-10
0	-8	22	-19
x_1	$*$	2	-2

T3	x_1	3	
0	6	-3	ENDE AVSZ
x_3	$*$	$\frac{1}{2}$	

Rückrechnung
$T_3 \to x_3 = \frac{1}{2}$
$T_2 \to x_1 = 2x_3 - 2 = -1$
$T_1 \to x_2 = -2x_1 + 4x_3 - 3 = 1$

Lösung
$\underline{x} = (-1|1|\frac{1}{2})^+$
Bemerkung
m Gleichungen, n Unbekannte ($m < n \rightarrow$ AVS günstiger / $m \geq n \rightarrow$ GAUSS oder AVS)

Weitere Anwendungen des AV

- Lineare Unabhängigkeit von Vektoren $\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n \in \mathbb{R}^m$ überprüfen

  Ansatz
  $x_1\underline{a}_1 + x_2\underline{a}_2 + ... + x_n\underline{a}_n = \underline{0} \Leftrightarrow \underline{A}\underline{x} = \underline{0}$ mit $\underline{A} = (\underline{a}_1|\underline{a}_2|...|\underline{a}_n)$
  (homogenes System, AVS mit Starttabelle)

  * Unabhängigkeit genau dann, wenn alle x_i ausgetauscht werden können
  * Die zu den ausgetauschten x_i (d.h. den Basisvariablen AV) gehörenden $\underline{a}_i$ sind unabhängig. SIe bilden eine Basis zu $L = (\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n)$

- Rang einer Matrix
  $\underline{A} = (\underline{a}_1|\underline{a}_2|...|\underline{a}_n)$... rang($\underline{A}$)

  Definition
  rang($\underline{A}$) = dim $L(\underline{a}_1, ..., \underline{a}_n)$
  Dimensionen des von den Spaltenvektoren aufgespannten Teilraumes (von $\mathbb{R}^m$)

  Berechnung
  rang($\underline{A}$) = Anzahl der ausführbaren Austauschschritte im AVSZ mit Starttabelle

- Berechnung der Determinante (n, n)-Matrix

Die Inverse einer (n, n)-Matrix
Definition 9
Es sei $\underline{A}$ vom Typ (n, n). Das Gleichungssystem $\underline{y} = \underline{A}\underline{x}$ sei für jedes $\underline{y}$ eindeutig nach $\underline{x}$ auflösbar, d.h. $\underline{x} = \underline{B}\underline{y}$. Dann heißt die (n, n)-Matrix $\underline{B}$ Inverse von $\underline{A}$

Bezeichnung
$\underline{A}^{-1} := \underline{B}$
Falls $\underline{A}^{-1}$ existiert, so heißt $\underline{A}$ regulär, sonst singulär

Bemerkung

- $\underline{A}$ ist regulär $\Leftrightarrow$ det $\underline{A} \neq 0$
- $\underline{A}$ regulär, dann hat $\underline{Ax} = \underline{b}$ die Lösung $\underline{x} = \underline{A}^{-1}\underline{b}$

Rechenregeln
$\underline{A}$ und $\underline{B}$ seien regulär. Dann gelten $\underline{A} * \underline{A}^{-1} = \underline{E}$, $\underline{A}^{-1} * \underline{A} = \underline{E}$,
$(\underline{A}^{-1})^{-1} = \underline{A}$
$(\underline{A} * \underline{B})^{-1} = \underline{B}^{-1} * \underline{A}^{-1}, (\underline{A}^T)^{-1} = (\underline{A}^{-1})^T$

Bemerkung
Die Menge der regulären Matrizen vom Typ (n, n) bildet mit der Operation "Matrizen-Multiplikation" eine (nicht ABELsche) Gruppe mit neutralem Element $\underline{E}$

Verfahren zur Ermittlung der Inverse

- vollständiges AV mit Starttabelle $\begin{array}{c|c} T_1 & x^T \\ \hline y & A \end{array}$
  - alle x_j sind austauschbar $\rightarrow \underline{A}$ regulär
  - nicht alle x_j sind austauschbar $\rightarrow \underline{A}$ singular
- Probemöglichkeit: $\underline{A} * \underline{A}^{-1} = \underline{E}$

Bsp. 11

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{, gesucht } \underline{A}^{-1}$$

T1	x_1	x_2	x_3
y_1	1	2	1
y_2	1	0	2
y_3	1	-1	1
K	$*$	-2	-1

T2	y_1	x_2	x_3
x_1	1	-2	-1
y_2	1	-2	1
y_3	1	-3	0
K	-1	2	$*$

T3	y_1	x_2	y_2
x_1	2	-4	-1
x_2	-1	2	1
y_3	1	-3	0
K	$\frac{1}{3}$	$*$	0

T4	y_1	y_3	y_2
x_1	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	-1
x_3	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1
x_2	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0

$$\underline{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -1 & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Vektorrechnung im $\mathbb{R}^3$

Kartesisches Produkt

Einige Begriffe

- Betrag eines Vektors $\underline{a}_i$: Länge des Pfeils, der a repräsentiert.
  Bezeichnung: $|\underline{a}|$
- Einheitsvektor: Vektor mit $|\underline{a}| = 1$
- Zu $\underline{a} \neq \underline{0}$ gehörender Einheitsvektor $\underline{a}^0 := \frac{1}{|\underline{a}|} * a$
- Kartesische Basis

Rechtsschrankenregel : Rechtsschranke $\perp$
zu $\underline{i}$ und $\underline{j}$ halten, auf kürzestem Weg von $\underline{i}$ nach $\underline{j}$ drehen $\rightarrow$ Bewegung Richtung $\underline{k}$

Kartesisches Koordinaten System
Fester Punkt O als Ursprung, kartesische Basis
Damit eindeutige Zuordnung

$$P \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = x * \underline{i} + y * \underline{j} + z * \underline{k} = \underline{r}$$

Bezeichnung

$$\underline{r} = x * \underline{i} + y * \underline{j} + z * \underline{k} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Oft auch:

$$\underline{i} = \underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{j} = \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bzw:

$$\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underline{x}$$

Betrag eines Vektors:

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} * |\underline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Das Skalarprodukt

Es sei φ der Winkel zwischen den Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$

Definition
Die Zahl $(\underline{a}, \underline{b}) := |\underline{a}| * |\underline{b}| * cos\varphi$ heißt Skalarprodukt der Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$

Eigenschaften

- $(\underline{a}, \underline{a}) > 0$ für $\underline{a} \neq \underline{0}$
- $(\underline{a}, \underline{b}) = (\underline{b}, \underline{a})$ (Symmetrie)
- $(\lambda\underline{.}..$

Satz 4
Es sei

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Dann gilt: $(\underline{a}, \underline{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

Folgerung

$(\underline{a}, \underline{b}) = \underline{a}^T * \underline{b} = \underline{b}^T * \underline{a}$

Anwendung

- Projektion

$$\underline{a}_{\underline{b}} \text{ von } \underline{a} \text{ und } \underline{b} : \underline{a}_{\underline{b}} = \frac{(\underline{a}, \underline{b})}{|\underline{b}|^2} * b$$

  Denn:

$$\underline{a}_{\underline{b}} = |\underline{a}| * \cos\varphi * \underbrace{\frac{\underline{b}}{|\underline{b}|}}_{\underline{b}^0} = \frac{(\underline{a}, \underline{b})}{|\underline{b}^2|} * \underline{b}$$

- Winkel φ zwischen 2 Vektoren : $\cos\varphi = \frac{(\underline{a}, \underline{b})}{|\underline{a}| * |\underline{b}|}$

Bsp. 12

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

  * Winkel:

$$|\underline{a}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}, |\underline{b}| = \sqrt{65}$$
$$(\underline{a}, \underline{b}) = 1 * 0 + (-2) * (-4) + 3 * 7 = 29$$
$$cos\varphi = \frac{29}{\sqrt{14} * \sqrt{65}} \rightarrow \varphi = \arccos(\frac{29}{\sqrt{14} * \sqrt{65}}) = 15,98$$

  * Projektion von $\underline{b}$ auf $\underline{a}$

$$\underline{b}_{\underline{a}} = \frac{(\underline{a}, \underline{b})}{|\underline{a}|^2} * \underline{a} = \frac{29}{14} * \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{29}{14}\underline{i} - \frac{29}{8}\underline{j} + \frac{87}{14}\underline{k}$$

- Orthogornalitätskriterium:

$$(\underline{a}, \underline{b}) = 0 \Leftrightarrow (|\underline{a}| = 0) \vee (|\underline{b}| = 0) \vee (\cos\varphi = 0)$$

  Vereinbarung
  $\underline{0}$ orthogonal zu jedem Vektor

$(\underline{a}, \underline{b}) = 0 \Leftrightarrow \underline{a} \perp \underline{b}$

Das vektorielle Produkt
Definition
Das vektorielle Produkt (auch Kreuzprodukt) $\underline{a} \times \underline{b}$ zweier Vektoren ist ein Vektor, der eindeutig festgelegt ist durch

- $|\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}| * |\underline{b}| * \sin\varphi$
- $\underline{a} \times \underline{b}$ ist senkrecht zu $\underline{a}$ und senkrecht zu $\underline{b}$
- $\underline{a}, \underline{b}$ und $\underline{a} \times \underline{b}$ bilden ein Rechtssystem

Eigenschaften des vektoriellen Produkts
$\underline{a} \times \underline{b} = -(\underline{b} \times \underline{a})$
$\underline{a} \times (\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a} \times \underline{b} + \underline{a} \times \underline{c}$

- speziell: $\underline{a} \times \underline{a} = \underline{a}$ (Stets!)
  $\underline{i} \times \underline{j} = \underline{k}, \underline{j} x \underline{k} = \underline{i}, \underline{k} \times \underline{i} = \underline{j}$
  $\underline{j} \times \underline{i} = -\underline{k}$ usw.

Satz 5

$$\underline{a} x \underline{b} = \begin{bmatrix} \underline{i} & a_1 & b_1 \\ \underline{j} & a_2 & b_2 \\ \underline{k} & a_3 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} * \underline{i} - \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} \underline{j} + \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \underline{k}$$

Bsp. 13

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{bmatrix} \underline{i} & 1 & 0 \\ \underline{j} & -2 & -4 \\ \underline{k} & 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} * \underline{i} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \underline{j} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \underline{k} = -2\underline{i} - 7\underline{j} - 4\underline{k} = \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Anwendungen

- Flächeninhalt des von $\underline{a}$ und $\underline{b}$ aufgespannten Parallelogramm $F = |\underline{a} \times \underline{b}|$
  $F = |\underline{a}| * h = |\underline{a}| * |\underline{b}| * \sin\varphi = |\underline{a} \times \underline{b}|$
- Flächeninhalt eines Dreiecks $\triangle P_1P_2P_3$ $F_\triangle = \frac{1}{2}|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}|$
- Parallelitätskriterium
  $\underline{a} \times \underline{b} = \underline{0} \Leftrightarrow |\underline{a} \times \underline{b}| = 0 \Leftrightarrow (|\underline{a}| = 0) \vee (|\underline{b}| = 0) \vee (\sin\varphi = 0)$
  Vereinbarung: $\underline{a}||$ zu jedem Vektor
  $\underline{a} \times \underline{b} = \underline{0} \Leftrightarrow \underline{a}||\underline{b}$

Das Spatprodukt

Definition 12
Die Zahl $(\underline{a} \times \underline{b}, \underline{c})$ heißt Spatprodukt der Vektoren $\underline{a}, \underline{b}$ und $\underline{c}$.

Eigenschaften
$(\underline{a} \times \underline{b}, \underline{c}) = (\underline{b} \times \underline{c}, \underline{a}) = (\underline{c} \times \underline{a}, \underline{b})$ (Zyklische Vorraussetzung)

Berechnung

$$(\underline{a} \times \underline{b}, \underline{c}) = det(\underline{a}|\underline{b}]\underline{)} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

Anwendungen

- Volumen des von $\underline{a}, \underline{b}$ und $\underline{c}$ aufgespannten Spates (Parallelstops):
  $V = |(\underline{a} \times \underline{b}, \underline{c})|$
- Komplanearistätskriterium
  $\underline{a}, \underline{b}$ und $\underline{c}$ sind komplanar, d.h. sie liegen in 0 angeheftet in einer Ebende
  $\Leftrightarrow (\underline{a} \times \underline{b}, \underline{c}) = 0$

Geraden und Ebenengleichungen

- **Parameterdarstellung einer geraden g durch die Punkte P_1 und P_2**

  $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + t * \overrightarrow{P_1P_2}, t \in \mathbb{R}$
  $\underline{r} = \underline{r}_1 + t * (\underline{r}_2 - \underline{r}_1), t \in \mathbb{R}$ bzw.
  $\underline{r} = \underline{r}_1 + t * \underline{a}, t \in \mathbb{R}$

  Beispiel
  Gerade g durch $P_1(1|2|-1), P_2(0|1|4)$

  $$g * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

- **Parameterdarstellung einer Ebene ϵ durch drei Punkte P_1, P_2, P_3, die nicht auf einer geraden liegen**

  P ... beliebiger Punkt von ϵ

  $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + u * \overrightarrow{P_1P_2} + v * \overrightarrow{P_1P_3}, u, v \in \mathbb{R}$
  $\underline{r} = \underline{r}_1 + u * (\underline{r}_2 - \underline{r}_1) + v * (\underline{r}_3 - \underline{r}_1), u, v \in \mathbb{R}$
  $\underline{r} = \underline{r}_1 + u * \underline{a} + v * \underline{b}, u, v \in \mathbb{R}$

- **Parameterfreie Ebenengleichungen**
  Normalenvektor $\underline{n}(\underline{n} + \underline{0}, \underline{n} \perp \epsilon)$

  $$\underline{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \underline{n} \perp \overrightarrow{P_0P} \text{ dabei:}$$

  $P(x, y, z)$ ... bei Punkt von ϵ
  $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ... fester Punkt von ϵ

  Orthogonalitätskriterium $(\underline{n}, \underline{r} - \underline{r}_0) = 0$, ausführlich:

$$\left(\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\\z-z_0\end{pmatrix}\right)=0, \text{ d.h. } a*(x-x_0)+b*(y-y_0)+c*(z-z_0)=0$$

Allgemeine Form: $ax+by+cz+d=0$ mit $d=-ax_0-by_0-cz_0$

Bsp. 15
Ebene durch $P_1(1|0|0), P_2(3|1|5), P_3(-2|0|2)$

- $$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + u*\underbrace{\begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix}}_{\equiv P_1P_2} + v*\underbrace{\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}}_{\equiv P_1P_3}$$

- Ein Normalvektor ist z.B.

  $$\underline{n} := \underline{a}\times\underline{b} = \begin{bmatrix}\underline{i} & 2 & -3\\ \underline{j} & 1 & 0\\ \underline{k} & 5 & 2\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-19\\3\end{pmatrix}$$

  Parameterfreie Darstellung: $2x-19y+3z+d=0$

- Einen Punkt, z.B.P_1 einsetzen
  $\rightarrow 2*1-19*0+3*0+d=0$
  $d=-z \rightarrow 2x-19y+3z-2=0$

Einige geometrische Grundaufgaben

- **Schnitt Gerade und Ebene**
  Bsp 16:
  Geg. Ebene ϵ: $2x-4y+z+3=0$ (1)

Gerade g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$ (2)

Gesucht:

- Schnittpunkt: $S(x_s, y_s, z_s)$
- Schnittwinkel α

- g:
  $x = 3 - t$ Eins in (1)
  $y = t$
  $z - 1 - 2t$

  (1)
  $2 * (3 - t) - 4 + t + 1 - 2t + 3 = 0$
  $-8t + 10 = 0 \rightarrow t = \frac{5}{4}$

  (2)
  $x = 3 - \frac{5}{4} = \frac{7}{4}$
  $y = \frac{5}{4}$
  $z = 1 - \frac{5}{3} = -\frac{3}{2}$

- Seitenansicht
  $\beta = \angle(\underline{n}, \underline{a})$
  $\alpha = |90° - \beta|$

$$\beta = \arccos\left(\frac{(\underline{a}, \underline{n})}{|\underline{a}| * |\underline{n}|}\right) \text{ mit } \underline{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{-8}{\sqrt{6} * \sqrt{21}}\right) = 135,45°$$

$$\alpha = |90° - 135,45°| = 45,45°$$

- **Schnitt zweier Ebenenen**
  Lösung: 2 Gleichungen mit 3 Unbekannten $(x, y, z) \to$ AVS (z.B.)

Bsp. 17
$x + y + z - 1 = 0$
$x - 2y + 3z + 4 = 0$

T1	x	y	z	1
0	1	1	1	-1
0	1	-2	3	4
K	$*$	-1	-1	1

T1	x	y	z
x	-1	-1	1
0	-3	2	5
K	$\frac{3}{2}$	$*$	$-\frac{5}{2}$

T1	x	y
x	$-\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$
z	$\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$

$y = t$ (frei wählbar), $x = -\frac{5}{2}t + \frac{7}{2}$, $z = \frac{3}{2}t - \frac{5}{2}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2}t + \frac{7}{2} \\ t \\ \frac{3}{2}t - \frac{5}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ 0 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

- Abstand $d(P_1, \epsilon)$ eine Produktes P_1 von einer EBene ϵ
  Ebene ϵ: $ax + by + cz + d = 0, P_1(x_1|y_1|z_1)$

$$d(P_1, \epsilon) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Bsp. 18
Abstand des Produktes $(2|-9|-16)$ von der Ebene $\epsilon : 3x - 7y - 8z + 26 = 0$

Lösung

$$d(P_1, \epsilon) = \frac{|3 * 2 - 7 * (-9) + 8 * (-16) + 26|}{\sqrt{3^2 + (-7)^2 + 8^2}} = \frac{|-33|}{\sqrt{122}} = \frac{33}{\sqrt{122}}$$

Bemerkung
Gerade g in x-y-Ebene, Gleichung $ax + by + c = 0$

Normalenbvektor: $\underline{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, Abstand $P_1(x_1, y_1)$ von $\epsilon : d(f_1, g) = \dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

- Abstand $d(Q, g)$ eines Punktes Q von einer Geraden g

$$g : \underline{r} = \underbrace{\overrightarrow{OP_1}}_{r_1} + t\underline{a}, t \in \mathbb{R}$$

L ... Lotfußpunkt, $L \in g$ $\overline{LQ} \perp g$
$d =$ Höhe $\overline{LQ}$ des von $\underline{a}$ und $\overrightarrow{P_1Q}$ aufgespannten Parallelogramms.

$$d = d(Q, g) = \frac{|\overrightarrow{P_1Q} \times \underline{a}|}{|\underline{a}|}$$

Lotfußpunkt: $\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1Q_a}$

Bsp. 19

$$g ... \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}; Q(1, 1, 1)$$

* Abstand $d(Q,g)$

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{r}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{P_1Q} = \underline{q} - \underline{r}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{P_1Q} \times \underline{a} = \begin{bmatrix} \underline{i} & -1 & 1 \\ \underline{j} & -2 & 0 \\ \underline{k} & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \to |\overrightarrow{P_1Q} \times \underline{a}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3$$

* Lotfußpunkt:

$$\overrightarrow{P_1Q}_{\underline{a}} = \frac{(\overrightarrow{P_1Q}, a)}{|a|^2} * \underline{a} = \frac{-1}{2} * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 3 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \to L(\frac{3}{2}|3|\frac{3}{2})$$

- Abstand $d(g_1, g_2)$ zweier nichtparalleler Geraden:
  * g_1: $\underline{r} = \underline{r}_1 + s * \underline{a}_1 (s \in \mathbb{R})$
  * g_2: $\underline{r} = \underline{r}_2 + t * \underline{a}_2 (t \in \mathbb{R})$

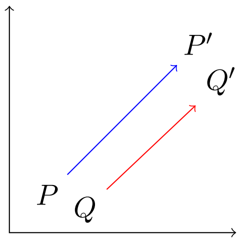
$$d = |\overrightarrow{P_1P_2}_{\underline{a}_1 \times \underline{a}_2}| \to d = d(g_1, g_2) = \frac{|(\underline{r}_2 - r_1, a_1 \times a_2)|}{|\underline{a}_1 \times \underline{a}_2|}$$

Transformation im $\mathbb{R}^2$

- Transformation eines Produktes $P(x,y) \to P'(x',y')$ (neue Koordinaten im gleichen Koordinatensystem)
  Aktive Transformation, wird im folgenden betrachtet.

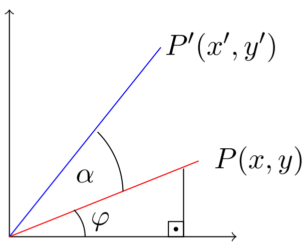
- Eng verwandt: Transformation des Koordinatensystem
  $P(x, y)$ bleibt fest $\to P'(x', y')$ neue Koordinaten im Koordinatensystem (= passive Transformation)

Transformation Verschiebung um Vektor $\underline{t} = \binom{a}{b}$



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Rotation
Zunächst Rotation um Ursprung, Drehwinkel α



Es gilt: $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$ (r, φ sind sogenannte Polarkoordinaten)
$x' = r\cos(\varphi + \alpha) = r * \cos\phi\cos\alpha - r\sin\varphi\sin\alpha$

Analog: $y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha$

Also $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}}_{\text{Rotationsmatrix } \underline{R}_a} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Spiegelung an einer Geraden g durch den Ursprung mit dem Normalemeinheitsvektor $\underline{n}$ ($|\underline{n}| = 1$)

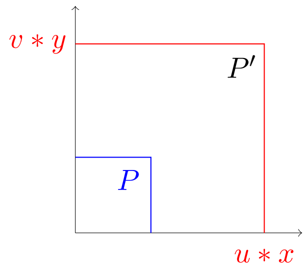
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (\underbrace{\underline{E} - 2\underline{n}\underline{n}^T}_{\text{HOUSEHOLDER Matrix}}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Bezeichnung Geradengleichung:

$ax + by + c = 0 \to \underline{n} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} * \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Skalierung (Zoom)

Koordinatenweise Streckung (oder Stauchung) vom Ursprung aus mit den Skalierungsfaktoren u in x-Richtung, V in y-Richtung



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}}_{\text{Skalierungsmatrix } \underline{S}_{u,v}} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Speziell: Spieglung um x-Achse: $u = 1, v = -1$

Speziell: Spieglung um y-Achse: $u = -1, v = 1$

Diskussion

- Drehung um Punkte $\neq 0$ und Spieglung an Geraden nicht durch den Ursprung können durch Hintereinanderausführung einer Translation, Drehung bzw. Spieglung und Rücktranslation realisiert.
- Mit Ausnahme der Translation können die beschriebenen Transformationen durch Matrizen-Multiplikation beschrieben werden (lineare Abbildungen). Zum Zwecke der Vereinheitlichung werden homogene Koordinaten eingeführt

Homogene 2D Koordinaten eines Punktes $P(x, y)$

(noch allgemeiner für eine Zahl $h \neq 0$, $\begin{pmatrix} hx \\ hy \\ h \end{pmatrix}$, kartesische Koordinaten ergeben sich dann durch Division durch die 3. Koordinate. Damit sind auch Zentralprojektionen beschreibbar, im Folgenden $h = 1$.

- **Translation in homogenen 2D-Koordinaten**

  Translationsvektor $t = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

  $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Transformationsmatrix für homogene Koordinaten}} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a \\ y+b \\ 1 \end{pmatrix}$$

  Inverse (=Rück-Translation)

  $$I_t^{-1} = I_{-\underline{t}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Rotation um Ursprung, Spieglung an Geraden durch Ursprung, Skalierung in homogenen Koordinaten**

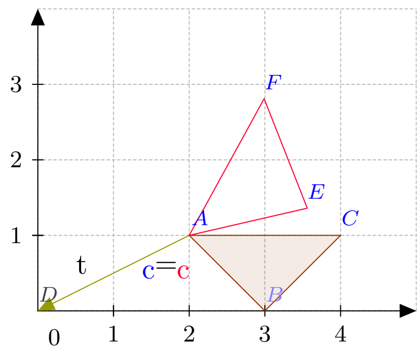
  Es sei $\underline{M}$ die Transformationsmatrix vom Typ $(2, 2)$ für die kartesischen Koordinaten $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Dann ist die Transformationsmatrix für die homogenen Koordinaten:

  $$\underline{M} := \begin{pmatrix} & \underline{M} & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \underline{M}^{-1} := \begin{pmatrix} & \underline{M}^{-1} & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  * Damit lässt sich die Hintereinanderausführung von beliebigen Transaktionen, Rotationen, Spieglungen und Skalierungen durch Matrizenmultiplikation darstellen (nicht kommutativ!). Die Gesamttransformation ist durch eine $(3, 3)$-Matrix $\underline{M}$ darstellbar.
  * Mit einer weiteren Matrizenmultiplikation kann das Ergebnis der Gesamttransformationen für k Punkte $A(a_1, a_2), B(b_1, b_2), C(c_1, c_2)$... erhalten werden.

$$\underline{M} * \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \dots \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_1 & b'_1 & c'_1, & \dots \\ a'_2 & b'_2 & c'_2 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots \end{pmatrix}$$

Bsp. 20
Das Dreieck ABC mit $A(3,0)$, $B(4,1)$ und $C(2,1)$ ist um seine Eckpunkte C umd $60°$ zu drehen. Man gebe die Transformationsmatrix $\underline{M}$ für homogene 2D-Koordinaten sowie das Bild an.



- Translation um $t = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

  $$\underline{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Rotation um $\alpha = 60°$ um 0

$$\underline{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\underline{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Rücktranslation

$$\underline{T}_{-t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\underline{M} = \underline{I}_{-t}\underline{R}_\alpha\underline{I}_t$
Reihenfolge von rechts nach links! FALK Schema einschließlich Ermittlung von A', B', C'

$$
\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc}
 & & & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & 4 & 2 \\
 & & & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\
 & & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
0 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2}\sqrt{3}+1 & \frac{5}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2} & 3 & 2 \\
0 & 1 & 1 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & -\sqrt{3}+\frac{1}{2} & \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3}+1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}
$$

$A'(3,37|1,37), B'(3|2,73), C'(2|1)$

Bemerkung
Analoges Vorgehen im $\mathbb{R}^3$, homogene Koordinaten $x, y, z, 1$. Spieglung einer Ebene mit Normalen Einheitsvektor $\underline{n}$ mit $(3,3)$ - HOUSEHOLDER Matri
Rotation um eine beliebige Achse (durch 0) durch 3 Drehungen um die Koordinatenachse ersetzbar, ... Anschließend erfolgt Projektion in $\mathbb{R}^3$

Eigenwerte und Eigenvektoren

Es sei $\underline{A}$ eine (n,n) Matrix

Definition
Die Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt Eigenwert (EW) der quadratischen Matrix $\underline{A}$, falls die Gleichung $\underline{A}\underline{x} = \lambda\underline{x}$ nicht-trivaler Lösung $\underline{x}$ (also $x + \underline{0}$) besitzt. Diese Lösungen heißen dann Eigenvektoren (EV) von $\underline{A}$ zum Eigenwert λ

Diskussion

- $\underline{A}\underline{x} = \lambda\underline{x} \leftrightarrow (\underline{A} - \lambda\underline{E})\underline{x} = \underline{0}$ (homogenes System), d.h. nicht-trivale Lösungen existieren genau dann, wenn
  $det(\underline{A} - \lambda\underline{E}) = 0$ (charakteristische Gleichung) gilt

- Vorgehensweise zur Ermittlung von EW und EV von $\underline{A}$)
  - Charakteristische Gleichungen lösen (n im allgemeinen komplexe Lösungen $\lambda_1, ..., \lambda_n$)
  - Gleichungssysteme $(\underline{A} - \lambda_i\underline{E})\underline{x} = \underline{0}$ lösen $rightarrow$ EV

Im folgenden werde nur symmetrische (n, n)-Matrizen $\underline{S}$ betrachtet, d.h. $\underline{S}^T = \underline{S}$

Satz 6
Es sei $\underline{S}$ eine symmetrische (n, n)-Matrix. Dann gilt:

- Alle EW von $\underline{S}$ sind reell
- Zu verschiedenen EW λ_1 bzw λ_2 $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ gehörende EV $\underline{v}_1$ bzw. $\underline{v}_2$ sind orthogonal
- Es gibt gibt eine Basis des Raumes $\mathbb{R}^n$, die aus n paarweise orthonormierte EV $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$ von $\underline{S}$ besteht (vgl. Diskussion)
- Es sei $\underline{V} = (\underline{v}_1|\underline{v}_2|...|\underline{v}_n)$ eine Matrix,
  die aus n paarweise orthonormierte EV von $\underline{S}$ zusammengesetzt ist. Dann gilt:

  - $\underline{V}\underline{V}^T = \underline{V}^T\underline{V} = \underline{E}$ (d.h. $\underline{V}^{-1} - \underline{V}^T, \underline{V}$ nennt sich auch orthogonale Matrix)

  - $\underline{V}^T\underline{S}\underline{V} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$
    $\underline{S} = \underline{V}\underline{\lambda}\underline{V}^T$
  - Es gilt: $\underline{S}^{-1} = \underline{V}\underline{\lambda}^{-1}\underline{V}^T$ (dahei $\underline{\lambda}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}$

Diskussion

– Übertragung der Begriffe orthogonal, Länge eines Vektors aus $mathbbR^3$ in $\mathbb{R}^n$:

  * $\tilde{}ula, \underline{b} \in \mathbb{R}^n$ heißen orthogonal, wenn

$$\underline{a}^T \underline{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 0$$

  * Betrag (Norm) eines Vektors

$$|\underline{a}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$

  *

$$(\underline{v}_i, \underline{v}_j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \text{ d.h. } |v_i| = 1 \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$